Chapitre 9

Limites de fonctions d'une variable réelle

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle noté I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère un réel x_0 tel que $x_0 \in I$ ou bien x_0 est une borne de I (ainsi, x_0 n'est pas forcément dans l'ensemble de définition de la fonction).

I Limite d'une fonction

1) Limite finie

a) Limite en un point x_0

Définition 1

On dit que la fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \text{ si } |x - x_0| \leq \alpha, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$

Interprétation :
Pour tout ε, on peut toujours s'approcher assez de x_0 (c'est le "$\exists \alpha$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$") pour garantir que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ (i.e. $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$).
Ainsi, ε est en quelque sorte la "précision" voulue, et α nous donne le seuil à partir duquel cette précision est atteinte.

Interprétation graphique :

Remarques :

- α dépend clairement de ε : si ε est petit, il faut a priori choisir un α plus petit. Attention à l'ordre des quantificateurs ! C'est déjà "$\forall \varepsilon$", puis "$\exists \alpha$".
- La limite d'une fonction en un point, si elle existe, est unique (même type de démonstration que pour les suites).

b) Continuité et prolongement par continuité :

Dans la définition précédente x_0 n'est pas nécessairement un point où f est définie. Néanmoins, si c'est le cas et que la limite existe, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ si } x \in I \text{et } |x - x_0| \leq \alpha, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Or, si $x_0 \in I$, on peut prendre $x = x_0$ dans la définition précédente, il vérifie bien $|x - x_0| \leq \alpha$ (puisqu'alors $|x - x_0| = 0$) et donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$, c'est à dire $f(x_0) = \ell$, autrement dit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$!

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ (donc f est définie en x_0).
On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie.

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Méthode : *limite d'une fonction continue en un point*

Si la fonction est continue en un point x_0, cela signifie que sa limite est simplement sa valeur en ce point.
Pour calculer la limite, il suffit alors de remplacer x par x_0.

Exemples :

- On peut montrer facilement que les polynômes sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$.

$$\text{Ainsi } \lim_{x \to 1} x^2 + 3x + 2 =$$

- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$ n'est pas continue en 0.

  En effet, comme $f(0) = 1$ et que tout autour on a 0, on ne pourra pas garantir que $|f(x) - \ell|$ soit aussi aussi petit qu'on veut quand on s'approche de 0, quel que soit le ℓ choisi...

Définition 3 (*Prolongement par continuité*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un point $x_0 \in I$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R}$, on appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \ell & \text{si } x = x_0 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On note habituellement ce prolongement f également.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

c) Limite à l'infini

Définition 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I=[a,+\infty[$.
On dit que f admet une limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ \text{si } x \geq M,\ \text{alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

De même on dit que f admet une limite ℓ en $-\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ \text{si } x \leq M,\ \text{alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Remarques

- Comme pour la limite finie, M dépend de ε.
- C'est plus ou moins la même définition que les suites : M joue le rôle de n_0 et on a l'idée que "à partir d'un certain rang", on est proche de la limite.
- Graphiquement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ traduit la présence d'une asymptote horizontale, d'équation $y = \ell$

d) Précisions éventuelles

Comme pour les suites, on peut parfois, à partir d'une étude plus ou moins poussée, déterminer le signe de $f(x) - \ell$ lorsque l'on est proche de x_0. On pourra alors noter :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell^-$ si, quand on est assez proche de x_0, $f(x) \leq \ell$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$ si, quand on est assez proche de x_0, $f(x) \geq \ell$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to 0} |x| =$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^3 =$

2) Limite à droite et limite à gauche

a) Definitions

Définition 5

On dit que f admet comme limite à droite en x_0 le réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ \text{si } 0 < x - x_0 \leq \alpha,\ \text{alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$, $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$, *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 6

On dit que f admet comme limite à gauche en x_0 le réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ \text{si } -\alpha \leq x - x_0 < 0,\ \text{alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$, $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$, *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}}{\longrightarrow} \ell$.

Principe :
on s'approche "par la droite" ou "par la gauche" de la limite.

Exemple fondamental : partie entière
Rappel : on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction partie entière, notée $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, qui à tout nombre réel x associe le plus grand entier relatif qui le précède. Par exemple $\lfloor 3,2 \rfloor = 3$ et $\lfloor -3,2 \rfloor = 4$

Remarque :
Certaines limites à gauche n'existent pas car la fonction n'est pas définie à gauche du point considéré. Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de limite à gauche en 0. En fait, parler de limite à gauche dans ce cas n'a même pas de sens...

b) Lien avec les limites "tout court"

Dans le cas où les limites à gauche et à droite ont un sens, on a le résultat suivant :

Proposition 1

Soit x_0 tel que les limites à gauche et à droite de x_0 ont un sens, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

▷ *Preuve :*

◁

⚠La réciproque est fausse : soit par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 0$.
Cependant, la limite de f en 0 n'existe pas....
La contraposée de cette propriété est souvent utile :

Corollaire 1

Si *avec $\ell \neq \ell'$, alors*

Exemple : Partie entière

En pratique, on utilisera beaucoup le résultat suivant :

Proposition 2

Soit x_0 tel que les limites d'une fonction f à gauche et à droite de x_0 ont un sens.

- *Si f n'est pas définie en x_0 :*

$$si \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

(on peut alors prolonger par continuité en posant $f(x_0) = \ell$.)

- *Si f est définie en x_0 :*

$$si \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \text{ et } \ell = f(x_0) \text{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

3) Limites infinies

a) En un point fini

Définition 7

On dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en un point x_0 si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } |x - x_0| \leq \alpha \text{ alors } f(x) \geq A$$
$$(resp. \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } |x - x_0| \leq \alpha \text{ alors } f(x) \leq A)$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
(resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$).

Traduction :
Au voisinage de x_0, $f(x)$ est plus grande (resp. plus petite) que n'importe quel nombre.

Remarque :
On définit de même les limites à droite et à gauche.

Exemple :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} =$

Interprétation graphique : asymptote verticale.

b) En un point infini

Définition 8

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \geq 0, \forall x \in D_f, \text{ si } x \geq B, \text{ alors } f(x) \geq A$$

Et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemples :

Remarque :
On définit de la même façon le fait que f admette pour limite $-\infty$ en $+\infty$, et toujours dans le même esprit les limites prises en $-\infty$.

II Théorèmes usuels sur les limites

Remarques préliminaires

- Ce sont plus ou moins les mêmes théorèmes que pour les suites, avec des preuves très proches, que nous ne détaillerons donc pas...
- Nous utiliserons souvent l'expression "au voisinage de x_0", qui signifie :
  — Si x_0 est un nombre, que l'on travaille dans un intervalle autour de ce nombre.
  — Si $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$, que l'on travaille avec des nombres suffisamment grands (positifs ou négatifs).
- On notera $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pour dire que $x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 est $+\infty$ ou $-\infty$.

1) Opérations sur les limites

Les mêmes que pour les suites, avec les mêmes formes indéterminées : se reporter au chapitre sur les suites convergentes pour plus de détail.

2) Relation d'ordre et limites

a) Passage à la limite dans les inégalités

Théorème 1

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ avec $a > 0$ ou $a = +\infty$.
Alors f est strictement positive au voisinage de x_0.
De même, si $a < 0$ ou $a = -\infty$, alors f est strictement négative au voisinage de x_0.

▷ *Preuve :* La même que pour les suites.... ◁

Corollaire 2 (*compatibilité avec la relation d'ordre*)

Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage d'un $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ on a $f \leq g$.
Alors si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existent on a

$$\lim_{x\to x_0} f \leq \lim_{x\to x_0} g$$

En particulier : si au voisinage de x_0, $\exists M \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq M$. (resp. si $f(x) \leq M$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq M$.)

▷ *Preuve :* On applique le théorème précédent à la fonction $f - g$ et on raisonne par l'absurde (même démo que pour les suites). ◁

b) Théorème des gendarmes ou théorème de l'encadrement

Théorème 2

Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et telles que pour tout x de ce voisinage on ait

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si f et h admettent une même limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0, alors g admet une limite également et on a $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} h = \ell$.

▷ *Preuve :* La même que pour les suites. ◁

Exemple :

Étudions l'existence de la limite en 0 de $f : x \to x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) Composition et limites

a) Composée de deux fonctions

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$$

▷ *Preuve :* Par exemple pour le cas $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$:

◁

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+x+1}$

b) Limite de fonction et suite

Théorème 4

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f. Soit (u_n) une suite d'éléments de D_f. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$

▷ *Preuve :*

◁

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(\frac{1}{n})$.

Corollaire 3

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x_0$.
Si $\lim f(u_n) = \ell$ et $\lim f(v_n) = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$, alors la fonction n'a pas de limite en x_0.

▷ *Preuve :* C'est la contraposée du théorème précédent. ◁

Exemple : Non existence de la limite de cos en $+\infty$:

4) Théorème de la limite monotone :

a) Limites aux bornes :

C'est l'analogue du théorème déjà connu pour les suites :

Théorème 5

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a < b$, a et b réels ou infinis. Alors :

(i) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ *existe.*
Elle est finie si et seulement si f est majorée et on a alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_I f$

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *existe.*
Elle est finie si et seulement si f est minorée et on a alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_I f$

▷ *Preuve* : Même idée que les suites... cf le chapitre concerné ◁

Corollaire 4

Tout fonction monotone sur un intervalle $]a, b[$ admet des limites (éventuellement infinies) en a et en b.

▷ *Preuve* : si f est croissante c'est le théorème.
Si f est décroissante alors $-f$ et croissante. On applique le théorème à $-f$ avant de revenir à f. ◁

b) Exemple d'application :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \dfrac{\ln x}{x} \end{array}$.

III Méthodes élémentaires de calculs de limites

1) Limite en un point

a) Cas des fractions rationnelles

On appelle "fractions rationnelles" les fonctions qui sont des quotients de deux polynômes.
Par exemple $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ est une fraction rationnelle.

Méthode : *Forme 0/0 dans une fraction rationnelle*
Si la limite en un point $a \in \mathbb{R}$ donne une forme 0/0, il suffit de factoriser le numerateur et dénominateur par $(x-a)$ et de simplifier jusqu'à lever l'indétermination.

En effet, si la forme obtenue donne $\dfrac{0}{0}$, c'est que a est racine du polynôme au numérateur et aussi de celui du dénominateur. Donc $(x-a)$ divise l'un et l'autre.
Cette méthode marche TOUT LE TEMPS.

Exemple :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$

b) Limites associées à des dérivées

Rappel : si f est dérivable en un point a,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Exemples : limites usuelle en 0

Théorème 6

Limites usuelle en 0 *à connaitre*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

c) Changement de variable :

Méthode : *Comment se ramener à une limite en 0*

Si le calcul de limite est en un point autre que 0 et que l'on veut se ramener en 0, on effectue un changement de variable :

- Si la limite est en $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$.
  Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(h + a)$.
- si la limite est en $+\infty$, on pose $h = \dfrac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} f(\dfrac{1}{h})$.
- si la limite est en $-\infty$, on pose $h = \dfrac{1}{x}$ et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} f(\dfrac{1}{h})$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(2 - x)}{x - 2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1 + \dfrac{1}{x})$

2) Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$

a) Croissances comparées :

Proposition 3

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{e^{\beta x}} = 0$
4. $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$

Les limites ci dessus, et seulement celles-ci, sont appelées "croissances comparées"

▷ *Preuve :*

◁

b) Factorisation par le terme dominant

Principe : Repérer les termes "les plus forts" et factoriser par ceux-ci

Exemple :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^3 =$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3x+2}{x^2+1+\ln x} =$

c) Utilisation d'expression conjuguée

Méthode : pour des F.I. à l'infini d'expression de la forme $\sqrt{A}+B$

On procède comme pour les suites : on multiplie et on divise par l'expression conjuguée.
(⚠ : $\sqrt{x^2}=|x|$)

Exemple :
limite en $+\infty$ de $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$.